

# Mémoire de DEA de Sciences Cognitives

Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Ecole Polytechnique, Université de Paris VI, Ecole Normale Supérieure

## Dynamique et viabilité d'un réseau adaptatif

Cas des réseaux neuronaux et sociaux

Camille ROTH

sous la direction de Paul BOURGINE

Centre de Recherche en Epistémologie Appliquée, Ecole Polytechnique, Paris

2002



## Résumé

Ce mémoire propose d'étudier l'apport de la théorie de la viabilité à la compréhension de la dynamique d'auto-organisation des réseaux connexionnistes. Nous proposons des critères de régulation qui permettent d'assurer la survie du réseau pris comme un système adaptatif, dans une optique dynamique et en se focalisant sur la coordination des agents et sur les comportements nouveaux pouvant émerger de leur collaboration.

L'étude porte conjointement sur les réseaux neuronaux et sociaux. Nous détaillons d'abord la manière dont un réseau neuronal peut s'organiser et évoluer structurellement afin de satisfaire des contraintes sensori-motrices. Il s'agit ensuite de voir comment ce formalisme peut s'appliquer aux réseaux sociaux de production économique ou culturelle. On s'attache particulièrement à comprendre comment se modifient des coalitions permettant aux cellules ou aux agents de faire mieux ensemble qu'individuellement (intelligence collective) et, comment et selon quelle dynamique s'effectue finalement l'intégration par le réseau.

## Abstract

This report aims at studying the contribution of the viability theory in the understanding of dynamics underlying self-organization among connexionist networks. We introduce control criteria ensuring the survival of the network taken as an adaptive system, in a dynamic view and by focusing on the coordination of the agents and on new behavior tending to emerge from their collaboration.

The study reviews both neural and social networks. We first detail the way a neural network can organize itself and structurally evolve in order to satisfy sensori-motor constraints (reinforcement learning, autonomous adaptation, coalitions of strongly connected synchronous neurones). We then review how this formalism can apply to social networks of economic or cultural production. In particular, we try to understand evolution-guiding mechanisms that make agents and cells work better together than individually (collective intelligence) and how the integration is finally being achieved by the network.

## Remerciements

Mes remerciements vont d'abord à Paul Bourguine, pour son extraordinaire disponibilité, le temps passé à m'expliquer, ses conseils et nos discussions.

J'exprime également ma grande gratitude à Jean-Pierre Aubin pour ses précieuses précisions.



# Table des matières

<b>Enjeux</b>	<b>7</b>
<b>1 L'apport de la viabilité</b>	<b>9</b>
1.1 Bases théoriques . . . . .	9
1.2 Correction dynamique . . . . .	10
1.3 Systèmes paramétrés . . . . .	11
1.4 Choix et implémentation de la régulation . . . . .	12
1.4.1 Evolution lente . . . . .	12
1.4.2 Evolution lourde . . . . .	13
<b>2 Le modèle de dynamique neuronale</b>	<b>15</b>
2.1 Le réseau neuronal comme système adaptatif . . . . .	15
2.2 Couches multiples et intégration neuronale . . . . .	17
<b>3 Le modèle social</b>	<b>21</b>
3.1 Dynamique économique des biens consommables . . . . .	21
3.1.1 Définition . . . . .	21
3.1.2 Dynamique . . . . .	22
3.1.3 Intégration économique . . . . .	24
3.2 Dynamique de production culturelle . . . . .	25
3.2.1 Définition du modèle . . . . .	26
3.2.2 Modèle à fonction de production constante . . . . .	28
3.2.3 Modèle à fonction de production évolutionnaire . . . . .	30
<b>Ouvertures</b>	<b>33</b>
<b>Annexes</b>	<b>35</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>41</b>



# Enjeux

Nous proposons dans ce mémoire d'étudier l'apport de la théorie de la viabilité à la compréhension de la dynamique d'auto-organisation des réseaux connexionnistes. L'enjeu est de proposer une vision unifiée des phénomènes d'adaptation et d'évolution structurelle des réseaux connexionnistes qui relèvent de la cognition individuelle ou sociale.

Dans une première partie, nous exposons les fondements théoriques de la viabilité et le formalisme qu'il est possible d'utiliser pour caractériser la façon dont les systèmes adaptatifs étudiés régulent et contrôlent leur évolution afin de rester viables. Nous proposons ainsi différentes conceptions de contrôle permettant d'assurer la survie de tels réseaux et explicitons le cadre sémantique dans lequel ils se situent (notamment, évolution lente ou lourde). En particulier, la viabilité peut recouvrir la notion de résolution distribuée de tâches, lorsque la tâche peut être posée sous forme de contraintes.

Nous présentons ensuite dans une seconde partie un formalisme décrivant les réseaux neuronaux comme de tels systèmes adaptatifs, contrôlés par des poids de connexion neuronale. Les tâches à effectuer étant représentées par des contraintes sensori-motrices, on montre comment l'évolution de l'architecture du réseau dérive de la satisfaction des contraintes de viabilité (apprentissage par renforcement, adaptation autonome en fonction de l'environnement, apparition de coalitions de neurones synchrones fortement liés).

Puis, dans une troisième partie, il s'agit de voir comment la théorie de la viabilité peut s'étendre à des réseaux sociaux comme l'organisation de la production de biens de consommation ou celle de la production culturelle. Nous montrons l'apport de la viabilité pour expliquer comment ces agents doivent *adapter* localement leur comportement sur la base de leur environnement proche, de leurs croyances. Nous tentons enfin de voir comment une forme de rationalité sociale décentralisée peut apparaître et comment celle-ci modifie les interactions des agents et l'organisation structurelle locale de leurs relations, sous l'action des contraintes de viabilité. On s'attache particulièrement à comprendre comment se modifient des coalitions permettant aux cellules ou aux agents de faire mieux ensemble qu'individuellement (intelligence collective) et, comment et selon quelle dynamique s'effectue l'intégration des résultats par le réseau.





# Chapitre 1

## L'apport de la viabilité

Dans cette partie, nous présentons la théorie de la viabilité et mettons en relief les notions qu'elle peut apporter pour l'étude des systèmes évolutionnaires connexionnistes mettant en jeu des agents devant assurer la survie et l'adaptation du système aux contraintes de l'environnement.

### 1.1 Bases théoriques

De manière générale, un système évolutionnaire en temps continu  $\mathcal{S}$  est décrit par :

- un espace d'état  $X$  ;
- une fonction d'évolution  $x \in \mathcal{C}([0, +\infty[, X)$ , qui définit à tout instant  $t$  l'état du système par le vecteur  $x(t) = x_t \in X$  ; et
- une fonction  $f : X \rightarrow X$ , qui décrit la dynamique autonome du système :

$$(\mathcal{S}) \quad x'_t = f(x_t) \tag{1.1}$$

En outre, le système est assorti d'un *domaine de viabilité*  $K \subset X$  dans lequel  $x_t$  doit rester pour que le système reste viable : concrètement, le système évolue dans  $X$ , mais n'est viable qu'en respectant la contrainte  $x_t \in K$ . On dira notamment qu'une évolution  $x$  est viable dans  $K$  si  $\forall t \in [0, +\infty[, x_t \in K$ .

Or, étant donnés un état initial  $x_0$  et une dynamique  $f$  quelconques, il n'y a *a priori* aucune raison pour que l'évolution du système reste viable. Deux solutions se présentent alors pour assurer la viabilité de  $x$  : soit *renforcer l'espace des contraintes*  $K$  en le remplaçant par son noyau de viabilité<sup>1</sup>, soit *corriger la dynamique* de sorte que les évolutions restent dans  $K$ .

Néanmoins, il faut constater que la méthode du calcul direct du noyau de viabilité n'est pas compatible avec l'idée selon laquelle le système choisit sa dynamique de manière endogène sans jamais avoir à prévoir toutes les évolutions viables possibles. C'est ce à quoi

---

<sup>1</sup>Par définition, le noyau de viabilité est le plus grand fermé inclus dans  $K$  viable sous  $f$  (i.e. le plus grand fermé  $C$  pour lequel il existe au moins une évolution viable pour chaque élément de  $C$ , cf. [8, Aubin]).

revient en effet le calcul du noyau et cela peut poser, outre le problème conceptuel, de sérieux problèmes pratiques liés à la complexité de la résolution mathématique.

La correction de dynamique correspond davantage à l'idée d'un contrôle visant à maintenir de l'intérieur et à chaque instant le système dans  $K$  ; c'est cette voie que nous nous proposons d'explorer.

## 1.2 Correction dynamique

Il semble assez intuitif que lorsque  $x_t$  est proche de la frontière de  $K$ , la viabilité du système est en jeu et la dynamique doit être corrigée en ramenant sa direction vers  $K$  pour maintenir le système dans  $K$ .

**Cône contingent** On introduit alors la notion de *cône contingent* à  $K$  en  $x$ , noté  $T_K(x)$ , qui désigne l'ensemble des directions des évolutions qui maintiennent  $x$  dans  $K$ . Plus précisément,  $T_K(x)$  désigne l'ensemble des directions  $v \in X$  pour lesquelles il existe  $h_n > 0 \xrightarrow{+\infty} 0$  et  $v_n \xrightarrow{+\infty} v$  tels que  $\forall n, x + h_n v_n \in K$ .

*Le théorème de la viabilité nous permet d'affirmer que tant que la dynamique  $x'_t$  appartient à  $T_K(x_t)$ , le système est viable.*<sup>2</sup>

Deux cas particuliers permettent d'appréhender les propriétés élémentaires de  $T_K$  :

- si  $K$  est restreint à  $\{x\}$ ,  $T_K(x) = \{0\}$  (il n'y a pas de direction non nulle qui permette de rester dans  $K$ ),
- si  $x$  est à l'intérieur de  $K$  ( $x \in \overset{\circ}{K}$ ), alors  $T_K(x) = X$  (toutes les directions sont a priori valables, et dans toutes les directions on peut trouver une évolution qui permette au système de rester viable).

**Dynamique viable** Lorsqu'on est confronté à une dynamique qui n'appartient pas à  $T_K(x_t)$ , on doit impérativement la remplacer par un élément de  $T_K(x_t)$  pour assurer la viabilité.

*Un système évolutionnaire adaptatif est précisément un système qui peut adapter ou corriger sa propre dynamique pour rester viable, c'est-à-dire un système autonome ; cette idée est à la base du concept de vie artificielle.*

On peut ainsi appréhender la manière dont, par exemple, un système constitué d'*organismes* dont les actions modifient des *états* sensori-moteurs va *modifier* sa dynamique afin de satisfaire aux contraintes de *survie*. En économie, un ensemble d'*agents* tentera d'assurer la saturation de la demande par l'offre de *biens* en ayant recours à des correcteurs de type "prix", sous contrainte de *rareté* de ces biens et des ressources disponibles pour les fabriquer. A chaque fois, il est question de modéliser la manière dont un système complexe peut contrôler sa propre évolution.

---

<sup>2</sup>Le théorème a été démontré sous cette forme par Nagumo en 1942. Il a été montré ultérieurement qu'il suffisait que  $f(x_t)$  appartienne à l'enveloppe fermée convexe de  $T_K(x_t)$  ( $\overline{\text{co}}(T_K(x_t))$ ).

### 1.3 Systèmes paramétrés

On peut exprimer cette notion de contrôle en remplaçant le système (1.1) par le système paramétré général suivant - c'est le paramètre qui va *contrôler* l'action :

$$\begin{cases} x'_t = F(x_t, p_t) & \text{action} \\ p_t \in P(x_t) & \text{perception (paramètre)} \end{cases} \quad (1.2)$$

On suppose donc que l'ensemble des paramètres ou *contrôles* disponibles  $P(x_t)$  dépend de l'état  $x_t$  du système, et il s'agit ainsi de déterminer quel type de contrôle puis quel contrôle optimal il faut choisir.

Le théorème de la viabilité reste vrai pour ce type de système, dit *de Marchaud*<sup>3</sup>.

**Carte de régulation** On introduit ensuite la notion de carte de régulation en  $x_t$  pour  $K$  :

$$R_K(x_t) = \{p_t \in P(x_t) \mid F(x_t, p_t) \in T_K(x_t)\}$$

Cet ensemble  $R_K$  contient donc les régulons  $p_t$  disponibles *et* permettant d'assurer la viabilité dans  $K$  en  $x_t$ . La *loi d'adaptation* (1.2) nous assure qu'une évolution du système est viable *si et seulement si* elle est gouvernée par des régulons de  $R_K(x_t)$ . En d'autres termes, le système est viable sous  $K$  en  $x_t$  *ssi*  $R_K(x_t)$  est non-vide.

**Modes de régulation** Ce cadre une fois posé, il convient de donner un sens à la fonction d'action  $F$ . En effet, on peut la définir de façon à corriger l'évolution du système à l'aide, par exemple :

- soit d'un régulon  $p_t$  comme dans le cas précédent avec une correction de dynamique à la  $F(x_t, p_t) = f(x_t) - p_t$ ,
- soit d'une matrice  $W_t \in \mathcal{L}(X, X)$ <sup>4</sup> avec une correction connexionniste où  $F$  devient  $F(x_t, W_t) = W_t f(x_t)$ .

L'interprétation sémantique diffèrera selon ce choix, puisqu'un régulon réfèrera davantage à un contrôle exercé de manière planifiée ou centralisée (relatif à un message, comme par exemple des prix ; on parlera de système "décentralisé" pour un régulon nul). En revanche, le choix d'une matrice sera plus pertinent pour décrire un contrôle exercé à travers les relations des variables entre elles (par exemple lorsque  $x$  représente un vecteur sur des agents,  $W$  désigne les relations entre ces agents, chaque coefficient  $w_{i,j}$  décrivant le lien de  $i$  vers  $j$  ; on parlera de système "déconnecté" lorsque  $W_t = \text{Id}$  car tous les coefficients  $w_{i,j}$  sont nuls pour  $i \neq j$ ).

---

<sup>3</sup>Un système de Marchaud doit en outre vérifier les conditions suivantes :  $\text{Graph}(P)$  est un fermé,  $F$  doit être continue,  $F(x, P(x))$  est un ensemble convexe pour tout  $x$ , et  $F$  et  $P$  ont une croissance linéaire.

<sup>4</sup> $\mathcal{L}(A, B)$  désigne l'espace vectoriel des applications linéaires de  $A$  dans  $B$ . Rappelons par ailleurs la définition du produit tensoriel  $\otimes$  : soient  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $B \in \mathcal{L}(G, H)$ , on note  $A^* \otimes B$  l'opérateur linéaire de  $\mathcal{L}(F, G)$  dans  $\mathcal{L}(E, H)$  défini par :  $\forall W \in \mathcal{L}(F, G), (A^* \otimes B)(W) = BWA$ .

Toutefois on peut montrer que d'une part le mode de régulation par matrice permet d'exprimer de manière strictement équivalente la correction par régulon<sup>5</sup>, et que d'autre part une régulation mixte  $(W_t, p_t)$ <sup>6</sup> produit aussi les mêmes effets relativement à la viabilité du système. Une combinaison de ces deux modes s'avère par exemple pertinente pour modéliser des actions au sein de réseaux sociaux (combinaison de directives globales et d'auto-organisation décentralisée).

Finalement, cette formalisation paramétrique permet de se focaliser sur la carte de régulation, et la question centrale devient donc de savoir quel paramètre optimal choisir parmi les éléments de  $R_K$  et à quelle interprétation ce choix correspond-il.

## 1.4 Choix et implémentation de la régulation

Nous allons détailler ici deux critères de choix du régulon, l'un minimisant la vitesse d'évolution du système et l'autre minimisant son accélération ; *d'autres critères pourraient bien entendu être proposés.*

### 1.4.1 Evolution lente

La première idée serait de choisir le régulon  $p$  avec la norme la plus faible, i.e. de minimiser  $\|p\|$ . Ceci correspond à l'*évolution viable lente* du système où celui-ci subit la correction la plus petite possible, de sorte qu'il soit le moins perturbé possible par rapport à sa dynamique initiale. Ici, cela revient à choisir l'évolution viable la plus proche de  $f(x_t)$ , soit sa projection sur le cône  $T_K(x_t)$  notée  $\Pi_{T_K(x_t)}f(x_t)$ .

On définit alors le *cône normal* à  $K$  en  $x_t$  noté  $N_K(x_t)$  par :

$$N_K(x_t) = \{p \in X^* \mid \forall x \in T_K(x_t), \langle p, x \rangle \leq 0\}$$

Le théorème de Moreau (cf. annexe) nous permet d'écrire  $\Pi_{T_K(x_t)}f(x_t) = f(x_t) - \Pi_{N_K(x_t)}f(x_t)$  : la nouvelle dynamique (le projeté de  $f(x_t)$  sur  $T_K(x_t)$ ) est égale à l'ancienne ( $f(x_t)$ ) *corrigée* par un terme du cône normal.

Nous pouvons ainsi conclure que toute solution de  $x'_t = \Pi_{T_K(x_t)}f(x_t)$  (qui décrit donc une évolution viable) est de fait solution de :

$$x'_t = f(x_t) - p_t \quad \text{où } p_t \in N_K(x_t) \tag{1.3}$$

Autrement dit, les *réglons*  $p_t$  permettant d'obtenir une dynamique viable lente en corrigeant la dynamique autonome  $f$  se trouvent dans  $N_K(x_t)$ . Constatons par ailleurs que le

---

<sup>5</sup>Il suffit d'exprimer la matrice comme suit [5, Aubin] :  $W_t = \text{Id} - \frac{f(x_t)}{\|f(x_t)\|^2} \otimes p_t$ . On vérifie aisément que  $W_t f(x_t) = f(x_t) - p_t$ . Notons que la réciproque est fautive, i.e. qu'une régulation par matrice ne peut pas en général s'exprimer par un régulon.

<sup>6</sup>On prend alors  $F(x_t, (p_t, W_t)) = W_t f(x_t) - p_t$  avec  $(W_t, p_t)$  appartenant à  $R_K(x_t) = \{(W_t, p_t) \in \mathcal{L}(X) \times X \mid W_t f(x_t) - p_t \in T_K(x_t)\}$ .

système (1.3) s'exprime ainsi aisément comme un système paramétré sous la forme décrite en (1.2) en posant  $F(x_t, p_t) = f(x_t) - p_t$  et  $P(x_t) = N_K(x_t)$ .

Ces régulons  $p_t \in X^*$  sont classiquement appelés *multiplicateurs de viabilité*, par analogie avec les multiplicateurs de Lagrange de l'optimisation sous contrainte. On trouvera en annexe une illustration pratique du calcul de ces multiplicateurs pour un cas standard.

**Complexité connexionniste** Si l'on choisit une régulation de type  $W_t f(x_t)$ , on introduit l'*indice de complexité connexionniste* comme la distance séparant  $W_t$  de la matrice Id : plus les connexions sont nombreuses et importantes entre les agents, plus  $\|W_t - \text{Id}\|$  est élevé. Minimiser la complexité revient à minimiser  $\|W_t - \text{Id}\|$ , et *in fine*, à minimiser  $\|p_t\|$ . C'est l'*évolution connectée lente*, dont la matrice de connexion optimale correspond au régulon optimal de l'évolution viable lente :  $W_t^o = \text{Id} - \frac{f(x_t)}{\|f(x_t)\|^2} \otimes p_t^o$ .

**Régulation mixte** Encore une fois, on peut choisir un mélange régulon-matrice dans des "proportions"  $(\alpha, \beta)$ , c'est-à-dire qu'on cherche le couple  $(\bar{W}_t, \bar{p}_t)$  qui minimise la norme  $\nu_{(\alpha, \beta)}(W_t - \text{Id}, p_t)^2 = \alpha \|W_t - \text{Id}\|^2 + \beta \|p_t\|^2$  et retrouver :

$$\begin{cases} \bar{W}_t = \text{Id} - \frac{\beta f(x_t)}{\alpha + \beta \|f(x_t)\|^2} \otimes p_t^o \\ \bar{p}_t = \frac{\alpha}{\alpha + \beta \|f(x_t)\|^2} p_t^o \end{cases}$$

## 1.4.2 Evolution lourde

Ce critère découle du *principe d'inertie* : "les régulons ne doivent être modifiés que lorsque la viabilité du système est menacée", en d'autres termes : à tout instant, on tente de minimiser l'évolution du système, les régulons évoluent le plus lentement possible lorsque la viabilité est en jeu, et restent constants sinon.

En pratique, il s'agit donc, pour  $p_t \in R_K(x_t)$ , de trouver l'évolution  $p'_t$  minimale. Pour cela, nous allons ajouter au système  $\{x'_t = F(x_t, p_t), p_t \in R_K(x_t)\}$  une équation différentielle régissant  $p'_t$ . En notant  $G_{R_K}(x, p) = DR_K(x, p)(F(x, p))$  la carte de *méta-régulation* associée à  $R$ , qui provient donc de la "différentiation"<sup>7</sup> de la loi d'adaptation, on obtient les vitesses d'évolution des régulons permettant d'assurer la viabilité du système, et qui est ainsi obtenue en dérivant la loi d'adaptation. On cherchera ainsi  $p'_t$  de norme minimale satisfaisant le système  $\{x'_t = F(x_t, p_t), p'_t \in G_{R_K}(x_t, p_t)\}$ .

La norme du régulon n'a suivant ce critère aucune importance, on tente de rendre sa dynamique la plus faible possible, et non sa norme : ceci correspond à l'idée que c'est précisément le régulon qui ne peut subir d'évolution brutale, et non le système lui-même. En outre, tant que la viabilité n'est pas en jeu, le système peut conserver les régulons

<sup>7</sup>Si  $R$  est une fonction multi-valuée de  $X$  vers  $Y$ , on note  $DR(x, y)$  le *cône dérivé contingent* de  $R$  en  $(x, y)$  défini par  $\text{Graph}(DR(x, y)) = T_{\text{Graph}(R)}(x, y)$ .

utilisés jusqu'alors (quelque soit leur norme), puisqu'il se situe à l'intérieur de  $K$  et que  $T_K(x_t) = X$ .

Le régulon est ainsi assimilable à un paramètre décrivant *en permanence*, et non occasionnellement, l'*état de contrôle* du système. Cette notion semble convenir davantage à une interprétation cognitive : seules les "crises" forcent une modification des paramètres du système, cette modification étant elle-même *conservée* jusqu'à la prochaine crise (proche de la notion d'*équilibre ponctué* introduite par les paléontologistes Eldredge et Gould en 1972, et s'opposant à l'idée d'évolution continue défendue jusqu'alors par les darwiniens, correspondant elle-même davantage à l'évolution lente).

Cette notion est tout aussi intéressante lorsqu'on parle de matrices de connexion : en minimisant  $\|W_t'\|$ , on tente de garder  $W_t$  constant, ce qui revient notamment à parler d'équilibre des *relations* au sein du système.

# Chapitre 2

## Le modèle de dynamique neuronale

On peut considérer les réseaux neuronaux comme des systèmes adaptatifs dont le but est de satisfaire des contraintes sensori-motrices (par exemple d'apprendre des exemples ou de généraliser des catégories d'exemples) et dont le contrôle est effectué par l'intermédiaire d'une matrice de connexions synaptiques.

Notre objectif est ici de proposer une formalisation pour laquelle la théorie de viabilité peut nous aider à modéliser les phénomènes d'apprentissage au sein de tels réseaux. Nous étudierons dans un deuxième temps comment ces réseaux, par l'intermédiaire de coalitions de neurones, peuvent résoudre de manière distribuée des tâches considérées comme un ensemble de contraintes.

### 2.1 Le réseau neuronal comme système adaptatif

On caractérise le réseau neuronal par  $N$  neurones formels, dont les états  $x_t(i) \in \mathbf{R}$  à l'instant  $t$  pour  $i \in \{1, \dots, N\}$  représentent l'état du système tout entier  $x_t \in \mathbb{X} = \mathbf{R}^N$ . Typiquement, chaque coefficient  $i$  du vecteur d'état  $x_t$  peut être interprété comme le potentiel électrique à la sortie du neurone  $i$ , la fréquence du signal de sortie du neurone ou bien la concentration interne en différents neurotransmetteurs.

Par ailleurs, le réseau neuronal est *contrôlé* par les connexions synaptiques entre les différents neurones, que l'on choisit de représenter par la matrice des connexions  $W(t)$  à l'instant  $t$ ,  $W_t$  appartient donc à  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^N, \mathbf{R}^N)$ . Notons que cette matrice n'est pas nécessairement symétrique : chaque coefficient  $w_{i,j}(t)$  peut s'interpréter comme le poids synaptique de la sortie du neurone  $i$  sur le neurone  $j$ .

**Dynamique** Dans le cas d'un réseau de neurones asynchrones, i.e. dont chaque neurone a une durée de traitement différente, le signal est traité continûment et l'évolution de l'état global  $x_t$  obéit à une dynamique continue  $f$ , soit  $x'_t = F(x_t, W_t)$ . De manière générale, on choisit  $F(x_t, W_t) = f(W_t x_t)$  : les signaux afférents sont pondérés par les connexions synaptiques  $W_t$  puis *intégrés* via la fonction  $f$  qui n'est pas forcément linéaire. Plus précisément,

les signaux afférents au neurone  $i$  sont traités ainsi :  $x'_i(t) = f_i(\sum_{j \in \{1, \dots, n\}} w_{i,j}(t)x(t))$ .

En pratique, il est cependant plus aisé de considérer des neurones synchrones (même temps de traitement pour tous) et se placer ainsi dans le cas discret : la dynamique de propagation devient  $x_i(t+1) = f_i(W(t)x(t))$ .

Cette dynamique discrète permet en outre une interprétation en termes de couches : à chaque période peut correspondre un passage à travers une couche du réseau. On peut alors supposer que le signal est traité à travers un certain nombre  $L$  de couches auxquelles correspondent les matrices de connexion  $(W^l)$  pour  $l \in \{1, \dots, L\}$ .<sup>1</sup>

Il convient maintenant de distinguer deux ensembles de  $p$  et  $q$  neurones correspondant respectivement au signal d'entrée  $x \in X$  et  $y \in Y$ . On peut supposer que ces signaux sont pré- et post-traités (biologiquement) respectivement par une fonction  $\psi : X \rightarrow \mathbf{R}^p$  et  $\phi : \mathbf{R}^q \rightarrow Y$ . De fait,

$$\begin{array}{ccc} x \in X, & \psi(x) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_p}) \in \mathbf{R}^p & \\ & \swarrow & \\ & \text{réseau} & \\ & \swarrow & \\ \phi(x_{j_1}, \dots, x_{j_q}) = y & \in Y & \end{array}$$

Sous le paramètre de contrôle  $W$ , un réseau de neurones transforme finalement le signal  $x$  en un signal de sortie  $y$  par le biais d'une fonction  $F$  :

$$y = F(x, W) \quad (2.1)$$

Dans le cas le plus simple où il n'y a qu'une seule couche, le signal de sortie est donc directement  $y_t = \phi(W_t \psi(x_t))$ .

**Apprentissage** Dans le contexte de l'apprentissage, le problème est donc d'expliquer comment le paramètre  $W$  est modifié au fur et à mesure que le réseau neuronal apprend. Classiquement, on utilise le formalisme  $y = F(x, W)$  introduit en (2.1), il s'agit alors d'adapter le contrôle  $W$  pour que le processus neuronal donne la sortie désirée lorsqu'une entrée adéquate est présentée : on dispose d'un *ensemble d'apprentissage* fini de  $n$  couples  $\{(a_i, b_i) \in X \times Y\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$  (signal d'entrée, signal de sortie), il faut trouver  $W_n$  tel que la contrainte d'apprentissage suivante soit satisfaite :

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad F(a_i, W_n) = b_i} \quad (2.2)$$

Par souci de clarté, nous prendrons le schéma d'un réseau neuronal classique à une couche, dont l'entrée  $x \in X_0$  est pré-traitée par une fonction  $\psi : X_0 \rightarrow X$ , ce signal étant ensuite pondéré par la matrice  $W \in \mathcal{L}(X, X)$ , puis post-traité par  $\phi(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ .<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ce formalisme permet aussi de décrire le cas particulier des réseaux récurrents, en appliquant le réseau un nombre  $L$  de fois.

<sup>2</sup>Dans le cas standard, nous supposons que  $F$  est affine par rapport au paramètre  $W$ , c'est-à-dire qu'elle est la somme d'une constante (éventuellement nulle comme ici) et d'une application linéaire par



On obtient ainsi :

$$F(x, W) = \phi(x)(W\psi(x)) \quad (2.3)$$

**Viabilité** Vu sous l'angle de la viabilité, le réseau neuronal en tant que système adaptatif risque de ne plus être viable lorsqu'on rajoute un nouvel exemple; en introduisant une nouvelle contrainte  $F(a_n, W_{n-1}) = b_n$  le paramètre  $W_{n-1}$  est *inadapté*. Comment alors le corriger de la manière la plus légère possible (norme minimale) de sorte à rester viable, c'est-à-dire en minimisant la distance  $\|W_n - W_{n-1}\|$ ? En ce sens, on cherche une évolution minimale du régulon, ce qui correspond à l'évolution lourde.

Nous introduisons alors l'algorithme d'*apprentissage lourd*, dont l'énoncé général est rappelé en annexe, et qui fournit ici la solution optimale à ce problème d'apprentissage précis<sup>3</sup> :

$$\boxed{W_n = W_{n-1} - \psi(a_n) \otimes \phi(a_n)^+(\phi(a_n)W_{n-1}\psi(a_n) - b_n)} \quad (2.4)$$

**Règle hebbienne** La matrice  $W_{n-1}$  est corrigée en ajoutant une matrice  $p \otimes q$  (produit tensoriel d'ordre 2) où  $p = \psi(a_n)$  et  $q = \phi(a_n)^+(\phi(a_n)W_{n-1}\psi(a_n) - b_n)$ . On constate que  $p$  et  $q$  dépendent linéairement respectivement des entrées et des sorties, la matrice des connexions  $W$  est donc renforcée par une matrice dont les coefficients sont proportionnels au produit des activités pré- et post-synaptiques; on *retrouve* donc une dynamique d'apprentissage *Hebbienne*.

Cet effet est encore plus flagrant lorsqu'on prend  $\phi(x) = \text{Id}$  pour tout  $x$ , car  $q$  devient simplement  $W_{n-1}\psi(a_n) - b_n$  et apparaît clairement comme une *erreur de viabilité*, qui est ici une erreur de prédiction entre ce que le réseau donne avec  $W_{n-1}$  et ce qu'il devrait donner. Si en outre  $\psi = \text{Id}$ , on a  $q = W_{n-1}a_n - b_n$ ,  $p = a_n$  et la correction devient explicitement  $p \otimes q = a_n \otimes (W_{n-1}a_n - b_n)$ , i.e. le produit tensoriel de l'entrée par la sortie du réseau, lorsqu'on présente le nouvel exemple.

## 2.2 Couches multiples et intégration neuronale

### Traitement modulaire

Ces résultats sont généralisables aux réseaux multicouches, partant de l'idée que le traitement d'une information ou d'une exécution complexe est subdivisé en tâches plus élémentaires, chaque niveau du processus étant chargé de préparer un signal pertinemment traité pour le prochain (on peut penser par exemple, au traitement du signal visuel du cortex primaire V1 transmis ensuite aux aires occipitales plus spécialisées).

---

rapport à  $W$ . Notons précisément qu'il est possible de rajouter à  $F(x, W)$  une partie "constante"  $c : X \rightarrow Y$  qui transforme le signal d'entrée "directement" en signal de sortie (au sens où cette opération ne dépend pas de  $W$ ), et ce sans changer la forme des résultats.

<sup>3</sup>Il suffit en effet de considérer  $F(x, W) = \phi(x)W(\psi(x))$  : en posant  $G(x) = \psi(x) \otimes \phi(x)$ , il vient alors  $F(x, W) = G(x)W$ . Enfin, profitant du fait que le pseudo-inverse (noté  $^+$ ) d'un produit tensoriel est le produit tensoriel des pseudo-inverses, on a  $G(x)^+ = \psi(x)^+ \otimes \phi(x)^+$ .

En prenant un réseau où chaque sortie d'une couche serait traitée par la suivante selon  $x^{l+1} = f^l(x^l, W^l)$ , la sortie globale du réseau à  $L$  couches est  $x^L = f^L(f^{L-1}(\dots(f^0(x^0, W^0), W^1)\dots), W^L)$  et les corrections des paramètres obtenues sont semblables. Les contraintes de viabilité se répercutent ainsi de module en module, suivant un phénomène de *rétro-propagation*.

## La liaison $\Sigma$ -II

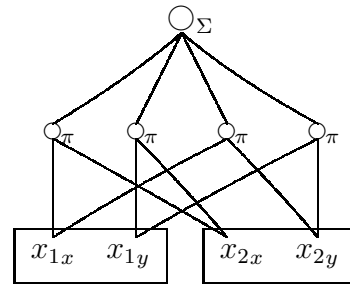
Néanmoins, si ce modèle permet de décrire l'intégration neuronale verticale, il ne rend pas encore compte de la possibilité que plusieurs entrées provenant de couches distinctes (de modules distincts) agissent sur une couche donnée en se renforçant les unes les autres. Ainsi [1, Andersen et al.] montrent que les informations visuelles, vestibulaires, motrices et auditives sont traitées *combinatoirement* dans le cortex pariétal postérieur pour fournir ensuite des informations de plus haut niveau intégrant ces informations (coordonnées des yeux, de la tête, du corps, etc.). D'autre part, des neurones provenant des mêmes couches (fournissant les mêmes informations, par exemple la position des yeux) peuvent aussi être traités de manière distincte grâce à un schéma de connexion différent.

Expérimentalement, on observe que les connexions synaptiques ne sont pas toutes de type axo-dendritique (connexion entre *un* axone et *une* dendrite), i.e. modélisables par une matrice de poids, mais peuvent aussi être regroupées en paquets [15, Dayhoff]. Dans ces paquets, l'effet individuel de chaque synapse n'est pas indépendant des autres synapses : par exemple lorsque deux axones sont connectés en série à une dendrite, l'activité synaptique entre le premier axone et la dendrite est modulée par l'activité du deuxième axone, interaction que l'on peut décrire par un terme bilinéaire en  $w_{(1,2)}x_1x_2$ .

On peut alors compliquer le modèle précédent à une couche en remplaçant la matrice  $W \in \mathcal{L}(X, X)$  agissant sur un vecteur d'entrée  $\psi(x) \in X$  par un tenseur multi-linéaire  $W \in \mathcal{L}_p(X_1 \times \dots \times X_p, X)$  agissant sur  $p$  vecteurs d'entrée  $(\psi_1(x), \dots, \psi_p(x))$ , avec  $\forall i, \psi_i : X_0 \rightarrow X_i$ . Ce formalisme tensoriel permet de rendre compte de la liaison dite *sigma-pi*, qui exprime la combinaison multiplicative (II) de plusieurs signaux afférents complexes ( $\in X_i$ ), avant leur sommation finale ( $\Sigma$ ) [10, Aubin & Burnod].

Considérons un cas particulier simple d'opérateur multi-linéaire, soit par exemple un tenseur bilinéaire  $W$  agissant sur deux entrées  $x_1 = \psi_1(x)$  et  $x_2 = \psi_2(x) \in \mathbf{R}^2$  et arrivant dans  $\mathbf{R}$ , i.e.  $W \in \mathcal{L}_2(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ , on obtiendra :

$$W(x_1, x_2) = w_{(1,1)}x_{1x}x_{2x} + w_{(1,2)}x_{1x}x_{2y} \\ + w_{(2,1)}x_{1y}x_{2x} + w_{(2,2)}x_{1y}x_{2y}$$



En raisonnant en termes de modules, représentés ici par les différentes couches de neurones, on peut ainsi modéliser l'action combinée multiplicative sur le module en cours des signaux de sortie des modules antérieurs.

D'autre part, l'utilisation des tenseurs nous autorise totalement à généraliser la structure du paramètre  $W$ , puisqu'il est toujours possible de considérer les matrices synaptiques employées jusqu'alors comme des cas particuliers de tenseurs d'ordre 2.

Notre système adaptatif devient finalement le système multi-linéaire suivant :

$$F(x, W) = \phi(x)(W(\psi_1(x), \dots, \psi_p(x))) \quad (2.5)$$

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, le problème d'apprentissage d'un nouveau *pattern*  $(a_n, b_n)$  où  $a_n = (a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \in X^n$  consiste à corriger le contrôle  $W_{n-1}$  de sorte que le nouveau paramètre  $W_n$  minimise  $\|W - W_{n-1}\|$  pour suivre une évolution *lourde*. On obtient ainsi :

$$W_n = W_{n-1} - \boxed{\psi_1(a_n) \otimes \dots \otimes \psi_p(a_n)} \otimes \boxed{\phi(a_n)^+ (\phi(a_n)W_{n-1}(\psi_1(a_n), \dots, \psi_p(a_n)) - b_n)} \quad (2.6)$$

Le tenseur  $W_n$  est à présent corrigé par le terme  $(p_1 \otimes \dots \otimes p_p) \otimes q$  où  $\forall i \in \{1, \dots, p\}, p_i = \psi_i(a_n)$  et  $q = \phi(a_n)^+(F(a_n, W_{n-1}) - b_n)$ .  $q$  correspond toujours à une correction due à l'erreur relative à l'activité post-synaptique, alors que  $p$  est maintenant un produit des activités des entrées. Nous aboutissons à une correction dite *multi-Hebbienne*.

## Coalitions de liaisons $\Sigma - \Pi$

**Multi-affinité** Ce modèle peut encore être généralisé en introduisant la multi-affinité dans  $F(x, W)$ . En effet, parmi les  $p$  entrées qui agissent sur une couche étudiée (comme une coalition de taille  $p$ ), on peut considérer un ensemble de coalitions de taille moindre faisant intervenir une partie seulement de ces entrées. Nous avons ainsi besoin d'un opérateur multi-linéaire  $W_S$  pour *chaque* coalition représentée par l'ensemble des entrées  $S \subset \{1, \dots, p\}$  :  $W_S \in \mathcal{L}_{|S|}(X_{i_1} \times \dots \times X_{i_{|S|}}, X)$ . L'action de toutes les sous-coalitions est donc exprimée par la somme de ces opérateurs multi-linéaires, soit par un opérateur multi-affine.

La fonction de sortie du réseau (2.5) est conservée mais  $W$  est maintenant un opérateur multi-affine défini par :

$$W = \sum_{S \subset \{1, \dots, p\}} W_S \circ \chi_S \quad \text{avec } \chi_S \text{ tel que}^4 : \begin{array}{l} X_1 \times \dots \times X_p \rightarrow X_{i_1} \times \dots \times X_{i_{|S|}} \\ \chi_S(x_1, \dots, x_p) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{|S|}}) \end{array} \quad (2.7)$$

En introduisant la multi-affinité, chaque application multilinéaire  $W_S$  associée à la coalition  $S$  subit toujours le *même* type de transformation multi-hebbienne qu'en (2.6), l'action de chaque coalition  $S$  étant renforcée localement par le produit tensoriel des activités des membres de la coalition.

Ce type de correction fournit un outil d'analyse de l'évolution des connexions inter-neurones : en plus, classiquement, d'être renforcées partout où elles sont davantage activées, les connexions sont d'autant plus renforcées au sein des coalitions actives. En observant les différentes contributions des coalitions actives, on peut représenter les différents

---

<sup>4</sup> $\chi_S$  s'interprète comme un "opérateur de coalition" et peut être aisément redéfini de façon à décrire des coalitions "floues".

groupes de neurones impliqués dans une tâche donnée et les coalitions correspondantes. Ce renforcement est à la base de l'action synchrone des coalitions lorsqu'un exemple de même type que celui présenté pendant l'apprentissage est présenté à nouveau, et pour lequel elles auront été aussi activées de manière synchrone.

**Information distribuée** Au fur et à mesure de l'apprentissage, le réseau neuronal stocke de manière distribuée l'information apprise (ou extraite) dans les matrices synaptiques. Cette distribution est aussi bien horizontale (au sein d'une même couche) que verticale (entre les différents modules) :

- **horizontale**, car le réseau aura appris une propriété globale uniquement par la modification de poids synaptiques locaux et par le seul intermédiaire d'informations disponibles localement. En ce sens, la théorie de la viabilité offre ici une métaphore convaincante du changement local des paramètres de contrôle, qu'elle induit sous la contrainte globale. Par ce mécanisme décentralisateur, chaque cellule du réseau ne contient de fait qu'une portion imprécise de l'information globale<sup>5</sup> et peut disparaître sans perte sensible de cohérence au sein du réseau, renforçant l'aspect adaptatif du système.

Enfin, le recours au produit tensoriel exprime la capacité de stockage incomparablement supérieure que permettent les combinaisons induites par les liaisons *sigma-pi*.

- **verticale**, car chaque couche/module retient ce qui lui est propre et signifiant. La supériorité du produit tensoriel sur la matrice standard est soulignée : comme nous l'avons déjà mentionné, des neurones provenant de la même zone peuvent servir différemment aux autres couches selon la manière dont ils sont connectés à elles, mais seront à chaque fois "renforcés" pour les tâches auxquels ils sont destinés. Le fait que tous puissent contribuer partout mais de façon différente permet d'améliorer l'efficacité du traitement parallèle.

---

<sup>5</sup>Une illustration concrète est donnée en [18, McClelland et al.]. Brièvement, il s'agit pour mémoriser les positions d'un certain nombre d'objets de recouvrir l'espace d'un nombre important de disques (ce sont les cellules). La position de chaque objet peut ainsi être décrite par l'intersection d'un sous-ensemble donné de disques, c'est-à-dire que cette information est *distribuée* parmi les cellules. En effet, aucune cellule ne code précisément sa position (c'est de l'ensemble que naît l'information) ni n'est indispensable (l'absence d'une cellule ne changera que peu l'ensemble-intersection décrivant l'objet). Ce schéma s'oppose radicalement à celui du stockage local symbolisé par le paradigme du "neurone grand-mère".

# Chapitre 3

## Le modèle social

Nous allons à présent tenter d’adapter ce type d’approche au point de vue de l’économie cognitive, en modélisant une communauté d’agents se répartissant les tâches afin d’assurer la viabilité d’un système économique. Incapables de prévoir totalement l’évolution du système, et donc victimes d’une rationalité limitée, les agents doivent *adapter* leur comportement d’une manière plus inductive que déductive (exploratoire), sur la base de leur environnement proche, de leurs croyances. Cette approche combine l’individualisme des agents (via leur dynamique autonome propre) et tente de voir comment une forme de rationalité sociale décentralisée peut apparaître et comment celle-ci modifie les interactions des agents, sous l’hypothèse d’un interactionisme généralisé et grâce aux contraintes de viabilité [9, Aubin et al.].

La demande devant toujours être inférieure à l’offre, il s’agit de voir comment les actions de chacun des agents, groupés en coalitions (firmes, laboratoires, etc.), peuvent évoluer et se modifier pour résoudre le problème de “survie” de manière *distribuée*.

Nous étudierons d’abord un modèle économique standard (partie 3.1, production de biens périssables) pour ensuite étendre et comparer les résultats obtenus à un modèle de production culturelle (partie 3.2), dont les “biens” obéissent à des propriétés sensiblement différentes (non-exclusivité et non-rivalité [19, Samuelson]).

### 3.1 Dynamique économique des biens consommables

#### 3.1.1 Définition

**Biens** Dans ce modèle, les paniers de biens sont décrits sur un espace vectoriel  $X = R^L$ , chaque direction correspondant à un type de bien.

**Agents et firmes** Les  $N$  agents sont des consommateurs-producteurs, au sens où ils *consomment* les biens qu’ils contribuent à *produire*, en mettant différentes ressources au service des entreprises, elles-mêmes groupes ou *coalitions* d’agents.

Les entreprises sont décrites par les employés qui les composent sous la forme de

sous-ensembles de  $\{1, \dots, N\}$ . La coalition représentée par une entreprise donnée est notée  $E \subset \mathcal{N} = \mathcal{P}(\{1, \dots, N\})$ .

Un agent  $i$  va donc :

1. *consommer* des biens suivant une demande  $x_i \in X$ , et
2. *produire* au sein des entreprises  $E$ , en mettant à disposition de chaque  $E$  dont il fait partie des ressources  $y_i^E \in Y$ , par exemple du temps, du matériel, des compétences, etc. Les ressources totales allouées par l'agent  $i$  valent finalement  $y_i = \sum_{\substack{E \subset \mathcal{N} \\ E \ni i}} y_i^E$ .

Chaque firme  $E$  dispose donc de  $y^E = (y_i^E)_{i \in E} \in Y^{|E|}$  et va produire des biens  $g^E(y^E) \in X$  suivant une fonction de production  $g^E : Y^{|E|} \rightarrow X$ .

### 3.1.2 Dynamique

**Contraintes** La première contrainte est collective : il faut que la demande soit en permanence inférieure à l'offre. Ainsi à tout instant  $t$  :

$$\boxed{\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i(t) \leq \sum_{E \subset \mathcal{N}} g^E(y^E(t))} \quad (\text{c coll})$$

Par ailleurs, individuellement, chaque agent ne peut allouer plus de ressources qu'il n'en dispose ; en notant  $\mathcal{Y}_i \subset Y$  l'ensemble dans lequel  $y_i$  doit évoluer, soit pour tout agent  $i$ , la contrainte s'exprime :

$$\boxed{y_i(t) \in \mathcal{Y}_i(t)} \quad (\text{c ind})_i$$

En outre, les variables d'état  $x_i$  et  $y_i$  sont soumises aux dynamiques autonomes suivantes (i.e. en l'absence de contraintes), pour tout agent  $i$  :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \alpha_i(x_i(t)) \quad (3.1a)$$

$$\forall E \subset \mathcal{N}, E \ni i, \frac{dy_i^E(t)}{dt} = \beta_i^E(y_i^E(t)) \quad (3.1b)$$

**Correction** Le système doit rester dans le domaine de viabilité  $K$  tel que :

$$K = \left\{ (x_i, y_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \mid \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i(t) - \sum_{E \subset \mathcal{N}} g^E(y^E(t)) \leq 0 \text{ et } \forall i, y_i(t) \in \mathcal{Y}_i(t) \right\}$$

Il est à présent possible de calculer les multiplicateurs de viabilité (on se reportera à l'annexe A). On trouve :

- $p(t) \in X$  pour la contrainte collective, impliquant une correction pouvant s'interpréter comme un "prix virtuel", et se répercutant :
  - sur les  $x_i$ , en  $-p(t)$ , réduisant d'autant la consommation de chaque agent, et

- sur les  $y_i^E$ , en  $+\frac{\partial g^E}{\partial y_i^E}(y^E)^* p(t)$ , incitant à allouer davantage de ressources aux productions associées (i.e., prix de ressources associés au prix de marché  $p(t)$ );
- $u_i(t) \in Y$  pour la  $i$ -ème contrainte individuelle, contrainte qui ne concerne que les  $y_i^E$  qui entraîne une correction de ceux-ci uniquement, de  $-u_i(t)$  (i.e. une réduction des ressources allouées).

La dynamique viable modifiée est donc finalement, pour tout agent  $i$  :

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \alpha_i(x_i(t)) - p(t) \quad (3.2a)$$

$$\forall E \subset \mathcal{N}, E \ni i, \frac{dy_i^E(t)}{dt} = \beta_i(y_i^E(t)) + \frac{\partial g^E}{\partial y_i^E}(y^E(t))^* p(t) - u_i(t) \quad (3.2b)$$

**Dynamique de la fonction de production** Nous allons à présent supposer que la fonction de production est multi-affine, en postulant que  $g^E$  est une somme de fonctions de production partielle  $g_S^E$  pour chaque sous-coalition  $S$  incluse dans  $E$  (les groupes de travail, en quelque sorte).

La multi-affinité permet de rendre compte des cas où des processus de production utilisent la ressource de manière multi-linéaire (coopérative), sans que cette généralisation ne nous prive de pouvoir décrire les processus plus classiques (matrices de productions). On peut s'attendre à ce que la norme des fonctions partielles décroisse en fonction de la taille de la sous-coalition, les contributions de ces fonctions étant multiplicatives par rapport aux ressources fournies par les agents impliqués<sup>1</sup>. Notons d'autre part qu'il y a autant d'applications  $g_S^E$  non-nulles que de sous-groupes  $S$  effectivement actifs, ce qui laisse supposer qu'en pratique beaucoup de  $g_S^E$  seront nulles.

Ainsi,  $g^E$  s'écrira<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} g^E(y^E) &= g_\emptyset^E + \sum_{i \in E} g_i^E(y_i^E) + \sum_{(i,j) \subset E} g_{(i,j)}^E(y_i^E, y_j^E) + \sum_{(i,j,k) \subset E} \dots \\ &= \sum_{S \subset E} g_S^E(y_{i_1}^E, \dots, y_{i_{|S|}}^E) = \sum_{S \subset E} (g_S^E \circ \chi_S)(y^E) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où les  $g_S^E$  sont des applications  $|S|$ -linéaires de  $Y^{|S|}$  dans  $X$  (i.e.  $g_S^E \in \mathcal{L}_{|S|}(Y^{|S|}, X)$ ), et  $\chi_S$  l'opérateur introduit en (2.7). Pour une entreprise de deux agents, par exemple, on aura  $g^{\{1,2\}}(y^E) = g_\emptyset^E + g_{\{1\}}^E(y_1^E) + g_{\{2\}}^E(y_2^E) + g_{\{1,2\}}^E(y_1^E, y_2^E)$ .

D'autre part, on supposera que  $g_S^E$  est régie par une dynamique autonome, correspondant à l'évolution des techniques de production :

$$\frac{dg_S^E(t)}{dt} = \gamma_S^E(g_S^E(t)) \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>En effet, si la contribution partielle due à un groupe de  $n$  agents est multipliée par deux lorsqu'un seul des agents apporte deux fois plus de ressources, on imagine mal que cette contribution partielle soit du même ordre de grandeur que celle associée à un seul agent

<sup>2</sup>Le temps n'est pas explicitement exprimé par souci de clarté mais on doit garder à l'esprit que toutes les notations en dépendent.

On doit appliquer la correction multi-linéaire suivante :

$$\boxed{\frac{dg_S^E(t)}{dt} = \gamma_S^E(g_S^E(t)) - \bigotimes_{i \in S} y_i^E(t) \otimes p(t)} \quad (3.5)$$

Le terme correctif est un produit tensoriel qui rappelle une correction multi-hebbienne, proportionnelle à la fois au produit des ressources fournies par les agents (terme  $\bigotimes_{i \in S} y_i^E(t)$ , qui montre que la “fonction de sortie” de la coalition est renforcée par le produit des activités de chaque membre de la coalition) et au “prix” du marché  $p(t)$ .

D’autre part, le modèle permet aussi d’observer l’évolution des participations des agents aux différentes coalitions. la dynamique corrigée de  $y_i^E$  devient,  $\forall E \subset \mathcal{N}, E \ni i$  :

$$\frac{dy_i^E(t)}{dt} = \beta_i(y_i^E(t)) + \sum_{\substack{S \subset E \\ S \ni i}} \frac{\partial g_S^E}{\partial y_i^E}(y^E)^* p(t) - u_i(t) \quad (3.6)$$

Si l’on suppose que  $Y = \mathbf{R}$ , i.e. les vecteurs de ressource sont de dimension 1 (par exemple, une quantité de travail dans un processus de production de services), la fonction  $g^E$  devient  $g^E(y^E) = \sum_{S \subset E} (\prod_{i \in S} y_i^E) g_S^E$  et la dynamique corrigée de  $y_i^E$  devient,  $\forall E \subset \mathcal{N}, E \ni i$  :

$$\frac{dy_i^E(t)}{dt} = \beta_i(y_i^E(t)) + \sum_{\substack{S \subset E \\ S \ni i}} \left( \prod_{j \in S \setminus i} y_j^E \right) \langle g_S^E(t), p(t) \rangle - u_i(t) \quad (3.7)$$

L’évolution de  $y_i^E$  est donc renforcée pour chaque sous-groupe  $S$  auquel  $i$  fait partie au sein de  $E$  d’un terme proportionnel au produit des allocations des autres agents, produit des allocations des autres agents, terme que l’on peut interpréter comme un *effet mimétique* : l’agent va travailler davantage dans les entreprises où l’activité est déjà importante. Aussi, dans un cadre de rationalité limitée, les agents ont tendance à adopter un comportement de mouton de Panurge et à imiter leurs proches voisins.

### 3.1.3 Intégration économique

**Architecture du réseau** Ces résultats nous permettent ainsi de fournir une explication de la formation et de l’évolution de l’architecture et des coalitions actives. Décrits ici sous forme qualitative, les effets sont toutefois parfaitement calculables dans des cas pratiques, et suivant les hypothèses faites sur les différentes variables nous pouvons ainsi tracer l’évolution de l’hypergraphe des relations au sein de ces réseaux.

Ceci devrait aussi permettre de voir quel impact la disparition d’un agent a sur la structure et la recomposition du réseau, notamment parce que ce formalisme *multi-linéaire* permet d’admettre qu’un agent puisse changer d’activité ou disparaître sans préjudice important, de la même manière que pour l’information distribuée dans le cadre neuronal.



**Couches multiples** Le présent modèle ne rend pas directement compte de l'intégration des chaînes de production, c'est-à-dire de la possibilité qu'il y ait plusieurs niveaux imbriqués de fabrication, des matières premières vers les produits finis. De la même manière que dans le schéma neuronal, cela reviendrait à distinguer différentes couches d'*output* qu'il suffirait de connecter par des opérateurs de production enchaînés.

Une contrainte globale d'adéquation entre la demande et l'offre des consommateurs finaux en produits finis donnerait lieu, comme dans le cas neuronal, à une *rétro-propagation* de cette contrainte chacune des couches antérieures, modifiant localement le réseau (i.e. à chaque échelle de production).

**Régulation des marchés** Enfin, les multiplicateurs de viabilité font apparaître un dernier aspect important : la *synchronisation* des agents, autour d'une même information. En effet, bien que les actions soient distribuées et donc décentralisées, on observe que le régulon  $p$ , qui est analogue à un prix, est global pour le système dans le sens où il ne dépend pas de  $i$  ni de  $E$ .

Un tel modèle peut fournir un outil de contrôle et de prospective économique. Modélisant l'action des agents pour conserver la viabilité d'un système, et s'apercevant qu'un marché risque d'être inefficace<sup>3</sup>, d'aucuns pourraient forcer une correction viable : quand le système peine à s'auto-organiser via les relations inter-agents, on agit encore sur le régulon  $p$ . C'est l'optique où la convention institutionnelle, aussi bien via une loi (*de recto*) que via une autorité (*de facto*), vient renforcer et contrôler la viabilité du système. La notion de développement durable illustre ainsi remarquablement ce mélange de conventions et d'auto-organisation censé assurer à la fois la viabilité écologique, économique et sociale.

## 3.2 Dynamique de production culturelle

Nous allons à présent tenter de voir si cette approche reste valide dans le cadre de la production culturelle, soumise à une distinction importante par rapport aux biens classiques : les biens culturels vérifient généralement des propriétés de non-rivalité et permettent un usage non-exclusif<sup>4</sup>. Ceci est notamment vrai pour les articles scientifiques dont nous allons ici traiter le cas.

---

<sup>3</sup>Inefficace au sens de non paréto-optimal, aux termes de contraintes politiques divergeant avec les intérêts de certains groupes d'agents, ou pour un marché sur lequel des problèmes d'allocations nécessitent une intervention étatique (correction des prix contre subvention, dans le cas de la PAC, ou subvention d'activités de recherche qui n'ont pas a priori de débouchés industriels).

<sup>4</sup>Non-rivalité : la consommation du bien par un agent supplémentaire ne diminue pas la quantité disponible pour les autres consommateurs. Non-exclusif : il est impossible d'interdire à un agent de consommer le bien.

### 3.2.1 Définition du modèle

**Biens** Dans ce modèle, les biens représentent l'ensemble des articles écrits sur  $L$  domaines, dont on peut considérer qu'ils sont formés par des combinaisons de  $D$  domaines de base, auquel cas  $L = |\mathcal{P}\{1, \dots, D\}| - 1 = 2^D - 1$ .

Les articles sont agrégés dans une grande bibliothèque  $z \in X = \mathbf{R}^L$ . On note  $(e_1, \dots, e_L)$  la base canonique de  $X$ .

**Agents** Les  $N$  agents sont caractérisés par la répartition de leur temps entre les différentes activités (lecture et production d'articles). On suppose ainsi que ces agents partagent leur temps entre :

1. *l'apprentissage libre* par la lecture d'articles parmi la grande bibliothèque.

On note  $x_i^{\emptyset,l} \in [0, 1]$  la proportion de temps passé à lire des articles dans la catégorie  $l$ .  $\sum_l x_i^{\emptyset,l}$  représente ainsi la proportion de temps totale accordée à la lecture, et  $x_i^{\emptyset} = \sum_l x_i^{\emptyset,l} e_l \in X$  représente le vecteur encapsulant les proportions de temps par catégories (i.e., il désigne la distribution des centres d'intérêt de  $i$ ).

On peut décider au choix que :

- $x_i^{\emptyset}$  est constant pour chaque agent. Un agent, outre ses activités de production dans des domaines connexes, ne s'intéresse dans ses lectures qu'à un certain ensemble pré-établi de domaines.
- $x_i^{\emptyset}$  varie en fonction des compétences<sup>5</sup>  $c_i : x_i^{\emptyset}(t) = \alpha^{\emptyset}(c_i(t))$ , où  $\alpha^{\emptyset}$  fixée par le modèle donne un vecteur-distribution de centres d'intérêt de tout agent  $i$  en fonction de ses compétences  $c_i$ .
- $x_i^{\emptyset}$  varie suivant une dynamique autonome  $\frac{dx_i^{\emptyset}(t)}{dt} = \alpha^{\emptyset}(x_i^{\emptyset}(t))$ ; c'est l'expression que nous allons adopter dans ce modèle.

2. *la production d'articles* au sein de coalitions  $E$  formées parmi les  $N$  agents. On désigne par  $\mathcal{N} = \mathcal{P}(\{1, \dots, N\})$  l'ensemble de toutes les coalitions possibles. Chaque agent alloue à une coalition  $E$  dans chaque domaine  $l$  une proportion de temps  $x_i^{E,l} \in [0, 1]$ . Il alloue donc une proportion de temps  $\sum_l x_i^{E,l}$  à la coalition  $E$ , auquel correspond le vecteur  $x_i^E = \sum_l x_i^{E,l} e_l \in X$ . Notons que l'on peut surveiller l'évolution

---

<sup>5</sup>On peut choisir de caractériser les agents par un vecteur de compétence  $c_i \in X$ , et d'exprimer la compétence  $c_i$  comme une fonction de  $T_i$ , somme des temps de lecture et de travail accumulés par l'agent  $i$ . Par exemple, on peut prendre  $c_i(t) = \log(T_i(t) + 1)$  (rendements décroissants sur le temps de lecture/production).

Par ailleurs,  $T_i$  vaudra :

$$T_i(t) = \int_{[0,t]} (x_i^{\emptyset}(u) + \sum_{\substack{E \subset \mathcal{N} \\ E \ni i}} x_i^E(u)) du \quad \in X \quad (3.8)$$

La compétence apparaît ici comme une variable d'observation du modèle permettant de rendre compte de l'évolution des capacités des acteurs. Ultérieurement, on pourrait tenter de faire rétroagir les  $c_i$  en les incorporant dans l'expression des fonctions de production des coalitions.

de l'architecture du réseau et donc des coalitions avec  $x_i^E$ .

Différents critères d'évolution sont disponibles pour les  $x_i^E$ . Ainsi, nous pourrions par exemple faire obéir leur dynamique à des contraintes de *matching* [14, Cowan et al.], les agents se regroupant préférentiellement en fonction de leurs compétences, ce qui ferait intervenir les  $c_i(t)$ . Dans le cadre de ce modèle, par souci de simplicité et de la même manière que pour  $x_i^\emptyset$ , nous considérerons que ces allocations de ressources évoluent suivant une dynamique autonome  $\frac{dx_i^E(t)}{dt} = \alpha_i^E(x_i^E(t))$ .

Finalement, la proportion de temps totale disponible pour l'agent étant bornée par 1, on obtient la contrainte individuelle pour chaque agent  $i$  à tout instant  $t$  :

$$\boxed{\sum_{l \in L} x_i^{\emptyset, l}(t) + \sum_{l \in L} \sum_{\substack{E \subset \mathcal{N} \\ E \ni i}} x_i^{E, l}(t) \leq 1} \quad (\text{c } 1)_i$$

**Ressources et production** Chaque agent met au service d'une coalition  $E$  dont il fait partie un vecteur de ressource (proportion de temps)  $x_i^E(t) \in X$ . La coalition  $E$  dispose donc de  $x^E(t) = (x_i^E(t))_{i \in E} \in X^{|E|}$ . On introduit alors la fonction de production  $g^E : X^{|E|} \rightarrow X$  permettant d'obtenir la production instantanée  $g^E(x^E(t))$  de la coalition  $E$ .

La définition de la forme de  $g^E$  est cruciale car elle doit rendre compte des mécanismes de création sous-jacents au réseau décrit par le modèle. On aurait pu par exemple supposer que le processus de production d'un article de type  $l$  était indépendant des ressources allouées à la coalition dans les autres types : cela reviendrait à considérer, par exemple, que les activités en épistémologie n'ont aucune influence directe sur celles de modélisation.<sup>6</sup> Une telle simplification risquerait de nous faire manquer un point essentiel de la production culturelle (ici scientifique) au sein d'un réseau : les interactions entre les domaines, ou formulé plus techniquement, les externalités des différentes activités entre elles.

Nous préfererons donc postuler ici que les différentes activités peuvent avoir une influence croisée entre elles, et qu'il faut ainsi garder  $g^E(x^E(t))$  fonction de  $X^{|E|}$  dans  $X$ . Par ailleurs, nous supposerons dans un premier temps ces fonctions de production constantes et quelconques. Nous détaillerons dans un deuxième modèle les hypothèses particulières qu'elles peuvent admettre en termes de dynamique et de morphologie.

Etant donnée une fonction de production  $g^E$ , la bibliothèque  $z$  est ainsi enrichie par la production instantanée totale sur toutes les coalitions  $\frac{dz(t)}{dt} = \sum_{E \subset \mathcal{N}} g^E(x^E(t))$ , soit finale-

---

<sup>6</sup>Plus précisément, l'agent  $i$  allouerait à  $E$  pour chaque domaine  $l$  une proportion de temps  $x_i^{E, l} \in \mathbf{R}$ . Inversement, une coalition  $E$  disposerait dans la catégorie  $l$  du vecteur de ressource  $x^{E, l} = (x_i^{E, l})_{i \in E} \in \mathbf{R}^{|E|}$  et produirait ainsi des articles de type  $l$  à une vitesse  $g^{E, l}(x^{E, l})$ , où  $g^{E, l} : \mathbf{R}^{|E|} \rightarrow \mathbf{R}$  représente la fonction de production de  $E$  dans  $l$ . Sa contribution instantanée totale à la grande bibliothèque serait donc la somme  $\sum_{l=\{1, \dots, L\}} g^{E, l}(x^{E, l}) e_l = g^E(x^E) \in X$ .

ment à tout instant  $t$  :

$$z(t) = \sum_{E \subset \mathcal{N}} \left( \int_0^t g^E(x^E(u)) du \right) \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Modèle à fonction de production constante

**Contraintes** On note  $z_i(t) = \int_0^t x_i^\emptyset(u) du$  le total des lectures de l'agent  $i$  à un instant  $t$ . Un agent  $i$ , en plus de la contrainte (c 1) <sub>$i$</sub> , ne peut pas avoir lu davantage que ce que contient la bibliothèque, soit  $\forall t, z_i(t) \leq z(t)$ . En utilisant (3.9), on obtient la contrainte suivante (semi-collective) pour chaque agent  $i$  à tout instant  $t$  :

$$\boxed{z_i(t) \leq z(t)} \quad (\text{c } 2)_i$$

Cette contrainte se distingue très significativement de la contrainte collective "offre-demande" du modèle précédent :

- elle est *intégrale pour l'offre* : les biens ayant la propriété de non-rivalité, l'offre s'exprime par la somme de tout ce qui a été produit depuis le début de l'histoire du système jusqu'à  $t$ .
- elle est *intégrale pour la demande* : les agents sont supposés ne pas relire ce qu'ils ont déjà lu, ils ne consomment donc pas les biens qu'ils ont acquis au sens classique du terme : ils les emmagasinent, la demande aussi est intégrale.
- elle est "*semi-collective*" : les biens sont non-exclusifs, en ce sens que si l'article existe personne ne peut s'en accaparer l'utilisation : tout le monde peut en profiter en même temps. La contrainte est donc semi-collective (collective d'un côté mais individuelle de l'autre) : elle s'applique à chaque agent ( $z_i$ ), mais se rapporte à un *bien public* collectif ( $z$ ).

Néanmoins, la contrainte intégrale pose de sérieux problèmes mathématiques, et nous allons d'abord considérer  $z$  et les  $z_i$  comme des variables d'état, nous débarrassant pour un temps, mais imparfaitement, des problèmes inhérents aux intégrales.

En posant  $Z = \left( (x_i^\emptyset, (x_i^E)_{E \subset \mathcal{N}}, z_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}, z \right)$ , on obtient ainsi le domaine de viabilité  $K = \{Z \mid \forall i, (\text{c } 1)_i \text{ et } (\text{c } 2)_i\}$  que l'on peut réécrire sous la forme  $K = K_1 \cap K_2$  où :

$$K_1 = \left\{ Z \mid \forall i, \sum_{l \in L} x_i^{\emptyset, l} + \sum_{l \in L} \sum_{\substack{E \subset \mathcal{N} \\ E \ni i}} x_i^{E, l} \leq 1 \right\} \quad (3.10a)$$

$$K_2 = \{Z \mid \forall i, z_i - z \leq 0\} \quad (3.10b)$$

**Dynamiques autonomes** Résumons à présent les dynamiques autonomes auxquelles obéissent les différentes variables de ce modèle : n'y sont soumises que les distributions de

proportion de temps des agents (les  $x_i^\emptyset$  et les  $x_i^E$ ). On a :

$$\forall i, \frac{dx_i^\emptyset(t)}{dt} = \alpha_i^\emptyset(x_i^\emptyset(t)) \quad (3.11a)$$

$$\forall i, \forall E \subset \mathcal{N}, E \ni i, \frac{dx_i^E(t)}{dt} = \alpha_i^E(x_i^E(t)) \quad (3.11b)$$

Rappelons par ailleurs les dynamiques des  $z_i$  et de  $z$  :

$$\forall i, \frac{dz_i(t)}{dt} = x_i^\emptyset(t) \quad (3.12a)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \sum_{E \subset \mathcal{N}} g^E(x_i^E(t)) \quad (3.12b)$$

**Dynamique corrigée** La correction pour chaque agent  $i$  correspondant à la contrainte  $K_1$  (3.10a) est un scalaire réel qui ne dépend que de  $i$ , la contrainte étant sommée sur  $l$ . On note  $v_i$  le vecteur de  $X$  dont toutes les coordonnées sont égales à ce scalaire, on déduit que la correction s'appliquant à (3.11) est :

$$\forall i, \frac{dx_i^\emptyset(t)}{dt} = \alpha_i^\emptyset(x_i^\emptyset(t)) - v_i(t) \quad (3.13a)$$

$$\forall i, \forall E \subset \mathcal{N}, \frac{dx_i^E(t)}{dt} = \alpha_i^E(x_i^E(t)) - v_i(t) \quad (3.13b)$$

D'autre part, la contrainte  $K_2$  (3.10b) donne une correction  $p_i \in X$  pour chaque agent  $i$  s'appliquant ainsi à (3.12) :

$$\forall i, \frac{dz_i(t)}{dt} = x_i^\emptyset(t) - p_i(t) \quad (3.14a)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \sum_{E \subset \mathcal{N}} g^E(x_i^E(t)) + \sum_i p_i(t) \quad (3.14b)$$

Cette dernière correction s'interprète de nouveau comme un prix virtuel qui réduirait l'allocation de lecture de l'agent  $i$  d'une quantité  $p_i$  lorsque celui-ci aurait "épuisé" un rayon de la bibliothèque, au sens où  $z_i^l(t) = z^l(t)$ . En contrepartie, la production  $\frac{dz(t)}{dt}$  subit une incitation égale à la somme de toutes les réductions  $p_i$  des agents : dans un domaine où les articles manquent, le réseau sera tenté de compenser d'autant (les  $p_i$  expriment une sorte "d'enchère au remplissage" des rayons de la grande bibliothèque).

Toutefois, écrite ainsi la contrainte semi-collective  $K_2$  ne fournit qu'une analyse incomplète des phénomènes sous-jacents : on trouve certes un système de marché, mais grossier, et sans indication sur la modification structurelle des groupes de production y participant.

### 3.2.3 Modèle à fonction de production évolutionnaire

Nous allons à présent considérer que  $g^E$  dépend du temps et préciser les hypothèses de multi-affinité auxquelles nous avons choisi de la soumettre. Pour observer son évolution, il faut aussi réécrire la contrainte  $K_2$  qui donne :

$$K_2 = \left\{ (x_i^\emptyset, (x_i^E)_{E \subset \mathcal{N}})_{i \in \{1, \dots, N\}} \mid \int_0^t x_i^\emptyset(u) du - \sum_{E \subset \mathcal{N}} \int_0^t g^E(x^E(u)) du \leq 0 \right\} \quad (3.10b')$$

**Multi-affinité** D'abord, nous supposons que  $g^E$  est multi-affine, ce qui s'écrit similairement à (3.3) :

$$g^E(x^E) = g_\emptyset^E + \sum_{i \in E} g_i^E(x_i^E) + \sum_{(i,j) \subset E} g_{(i,j)}^E(x_i^E, x_j^E) + \sum_{(i,j,k) \subset E} \dots = \sum_{S \subset E} g_S^E((x_i^E)_{i \in S}) \quad (3.15)$$

où les  $g_S^E$  sont des applications de  $\mathcal{L}_{|S|}(X^{|S|}, X)$ .

Cette écriture s'interprète en considérant la coalition  $E$  comme un laboratoire, et les  $S \subset E$  comme des groupes de travail au sein du laboratoire. Sur chacun des groupes  $S$ , la fonction  $g_S^E$  représente le poids de la contribution de la sous-coalition  $S$  à la vitesse globale de production<sup>7</sup>.

Les collaborations inter-laboratoires ne sont pas ici explicitement prises en compte, mais seulement implicitement par le fait que deux agents appartenant respectivement à  $E$  et  $E'$  peuvent aussi appartenir au "laboratoire virtuel"  $E''$ .

**Interactions inter-domaines** En reprenant l'idée que les  $L$  catégories sont formées de combinaisons à partir des  $D$  domaines de base<sup>8</sup>, on peut désigner une catégorie  $l$  par sa composition sur  $D$ , i.e. par un élément de  $\{0; 1\}^D$ . Par exemple, à partir de deux domaines de base, "physique" ( $P \equiv (1, 0)$ ) et "statistique" ( $S \equiv (0, 1)$ ), on peut former trois catégories : deux pures  $P$  et  $S$ , et une mixte "physique statistique" ( $PS \equiv (1, 1)$ ).

De manière générale, on dira qu'une catégorie  $l'$  précède une catégorie  $l$  ssi  $\forall i \in \{1, \dots, D\}, l'_i < l_i$  (on note  $l' \prec l$ ). On désigne alors par  $l^\prec$  l'ensemble des prédécesseurs de  $l$ . Ici, pour une catégorie  $l$  formée à partir de  $c$  domaines de base (e.g., pour "physique statistique"  $c = 2$ ),  $l$  découle d'au plus  $2^{c-1}$  domaines. Si l'on définit le degré de parenté d'un prédécesseur  $l'$  comme le nombre de domaines dont il diffère de  $l$ , on obtient l'ensemble  $l^{\prec d}$  des prédécesseurs de degré  $d$  (on a  $|l^{\prec d}| = C_c^d$ ). On note  $\mathcal{V}_a^\prec(l) = \bigcup_{d \in \{1, \dots, a\}} l^{\prec d}$  le *voisinage amont d'ordre  $a$  de  $l$* . On vérifie  $l^\prec = \mathcal{V}_{c-1}^\prec(l)$ .

Pareillement, on peut définir un successeur de  $l$  (catégorie qui découle de  $l$ ) comme un  $l'$  tel que  $l \prec l'$ . On note  $l^\succ$  l'ensemble des successeurs de  $l$ ,  $l^{\succ d}$  les successeurs de  $l$  de degré  $d$ , et  $\mathcal{V}_b^\succ(l) = \bigcup_{d \in \{1, \dots, b\}} l^{\succ d}$  le *voisinage aval d'ordre  $b$  de  $l$* . On vérifie  $l^\succ = \mathcal{V}_{D-c}^\succ(l)$ .

<sup>7</sup>De même que dans le modèle précédent, elle est multi-linéaire suivant les participations  $x_i^E$  des agents à la sous-coalition  $S$ , et donc plus généralement à la coalition  $E$ . Notons aussi qu'il s'agit dans (3.15) de l'écriture générale, un certain nombre de  $g_S^E$  étant nuls pour des sous-coalitions  $S$  "non-existantes".

<sup>8</sup>On peut raisonnablement admettre que  $D$  est fixe, le modèle se situant dans un cadre temporel sans révolution scientifique majeure, comme l'apparition de l'électricité, etc.

Enfin, on définit le *voisinage global de degré*  $(a, b)$  d'une catégorie  $l$  l'ensemble :

$$\mathcal{V}_{a,b}(l) = l \cup \mathcal{V}_a^{\leftarrow}(l) \cup \mathcal{V}_b^{\rightarrow}(l) \quad (3.16)$$

Cet outillage nous permet de préciser l'idée selon laquelle la production dans une catégorie  $l$  est aussi influencée par l'héritage des disciplines qui l'ont engendrée et par les rétroactions des sous-disciplines qu'elle engendre. On conçoit que pour une fonction de production  $g_S^E$ , la fonction partielle de production  $g_S^{E,l}$  (i.e. dans une catégorie  $l$ ) soit d'autant plus faiblement influencée par la ressource allouée à une autre catégorie  $l'$  que  $l'$  est éloignée de  $l$  (voisinages de degré de plus en plus élevé), jusqu'à n'être plus influencée du tout lorsque  $l'$  ne fait plus partie du voisinage global de  $l$ .

En pratique, en se donnant deux degrés  $a$  et  $b$  d'influence respectivement amont et aval,  $g_S^{E,l}$  ne dépendrait ainsi que des coordonnées des  $x_i^E$  sur  $\text{vect}(e_i)_{i \in \mathcal{V}_{a,b}(l)}$  (coefficients nuls partout ailleurs). Dit plus clairement : *la production d'articles de type  $l$  ne dépendra que des ressources allouées pour les domaines dont découle  $l$  (à un degré  $a$ ) ou qui découlent de  $l$  (à un degré  $b$ ).* On peut ainsi s'attendre à ce que les applications  $g_S^E$  soient relativement "creuses" (matrices contenant peu de termes significatifs et beaucoup de zéros). L'étalement des coefficients permet de rendre compte qualitativement de l'autonomie relative d'une discipline.

**Dynamique** Nous ferons ensuite l'hypothèse que  $g^E$  est une fonction de  $[0, +\infty[$  dans l'espace des fonctions  $X^{|E|} \rightarrow X$ . Pour tout  $t \geq 0$ ,  $g^E(t) : X^{|E|} \rightarrow X$ .

Par ailleurs,  $g^E$  est soumise à une dynamique autonome qui reflète l'évolution de la fonction de production due, par exemple, à l'amélioration des compétences des agents, ou bien aux améliorations technologiques (accessibilité à la grande bibliothèque plus grande, etc.).

On obtient la dynamique autonome globale  $\frac{dg^E(t)}{dt} = \gamma^E(g^E(t))$  que l'on réécrira finalement (3.2.3) comme une dynamique autonome sur chacun des  $g_S^E$  :

$$\frac{dg_S^E(t)}{dt} = \gamma_S^E(g_S^E(t)) \quad (3.17)$$

Il n'a malheureusement pas été possible de calculer les corrections de dynamique de  $g_S^E$  pour la nouvelle contrainte  $K_2$  introduite en (3.10b'), celle-ci requérant une étude mathématique qui n'a pas pu être menée dans le cadre de ce mémoire. Nous laissons donc ouverte la question de la correction de la dynamique des fonctions de production et de son impact sur les participations des agents, comme nous avons pu le montrer dans le premier modèle.





# Ouvertures

Ce mémoire est un travail de modélisation au sens où il propose de voir quel peut-être l'apport la théorie de la viabilité à la compréhension des dynamiques d'auto-organisation dans les réseaux connexionnistes. Nous avons passé en revue les réseaux neuronaux, puis sociaux, et au-delà des différences inhérentes aux contraintes *physiques* à modéliser, vu quelles propriétés communes ces réseaux partagent lorsqu'ils sont soumis à des contraintes de viabilité.

Considérés comme des systèmes évolutionnaires paramétrés, ces réseaux peuvent par l'intermédiaire d'un paramètre de contrôle, réguler leur dynamique et s'adapter à l'environnement de manière à rester viables. Des différents critères disponibles pour choisir un paramètre parmi ceux qui assurent la viabilité, celui d'évolution lourde semble remporter la faveur de l'interprétation cognitive. Selon ce critère, en effet, le paramètre n'évolue pas tant que la viabilité n'est pas en jeu ; c'est seulement lors d'une crise que l'on assiste à une correction du paramètre, le nouveau paramètre étant alors lui-même conservé jusqu'à la crise suivante, se rapprochant du concept d'*équilibre ponctué*.

Ainsi, il semble plus vraisemblable que les connexions neuronales ne sont pas radicalement modifiées à chaque fois que les contraintes évoluent, mais qu'au contraire c'est la correction la plus faible permettant d'assurer la viabilité qui est retenue. De même, on imagine bien que les relations des acteurs économiques obéissent à une certaine rigidité, de caractère institutionnel, qui implique qu'un dysfonctionnement local ne remet pas en cause toutes les relations du système.

Par ailleurs, les corrections induites par ce formalisme mettent en évidence deux propriétés particulièrement caractéristiques du comportement de tels réseaux : les *coalitions*, et *l'organisation multi-couche, ou multi-étagée (intégration)*.

D'abord, l'évolution des coalitions a été explicitée dans le cas où les opérations peuvent être supposées multiplicatives, et donc représentées multi-linéairement : c'est la possibilité que plusieurs entrées se renforçant les unes les autres, ou c'est le cas du processus de production utilisant les ressources de manière coopérative. Les contraintes font apparaître, sous ces hypothèses de multi-affinité, des renforcements de type multi-hebbien modifiant la structure des liens. Ce type de correction permet l'analyse de l'évolution des relations : les connexions sont d'autant plus renforcées au sein des coalitions actives, et en observant les différentes contributions des coalitions actives, on peut représenter les différents groupes impliqués dans une tâche donnée et les coalitions correspondantes.

Ensuite, l'organisation multi-couche (intégration verticale) : le formalisme utilisé permet

d'abord de passer aisément du mono-couche au multi-couche. On observe, dans le cadre social comme dans le cadre neuronal, l'organisation en coalitions avec une demande ou une contrainte aval qui rétro-agit sur l'organisation de l'offre ou des connexions en amont, et qui force la réorganisation des processus en amont en se rétro-propageant, sous contrainte de la viabilité. Ce modèle permet ainsi de prendre en compte l'intégration des différentes couches et étapes d'organisation neuronale (modules), économique (firmes), et culturelle (différents degrés de production amont, en mathématiques par exemple, et aval, e.g. en physique-statistique-économie).

Ultérieurement, on pourrait prolonger l'étude des réseaux scientifiques suivant deux axes : le premier, théorique, viserait à résoudre le problème mathématique relatif à l'expression des contraintes intégrales dans le cas de biens culturels publics (non-exclusivité et non-rivalité), et comparer les conséquences des évolutions lente et lourde ; le deuxième, empirique, proposerait de vérifier les conditions réelles de formation et d'évolution des réseaux de cognition, en profitant de la grande disponibilité des documents scientifiques au format électronique. Leur référencement détaillée, dans laquelle on identifie un couple (auteur, laboratoire, code JEL) à un couple (agent, coalition, domaine de l'article), permet en effet d'envisager un traitement automatique pour tester les hypothèses du modèle, en partie la question des évolutions lente et lourde. L'intérêt devient alors double : (i) réaliser un processus automatique qui permette de constituer une base de textes, dans le but à moyen terme de rendre cette base disponible pour les chercheurs d'un sous-domaine ; et (ii) observer, dans une optique adaptative et évolutionniste, la dynamique de cette base de textes au sein du réseau scientifique qui la produit, et dans un second temps la dynamique des croyances produite par la dynamique de l'hypergraphe des coalitions.

# Annexe A

## Calcul des multiplicateurs de viabilité

Rappelons brièvement l'enjeu : il s'agit, lorsque la dynamique  $f(x_t)$  sort du cône contingent  $T_K(x_t)$ , de la ramener dans ce cône en la remplaçant par son approximation la plus proche, soit la projection de  $f(x_t)$  sur  $T_K(x_t)$ .

Pour un cône  $C \subset X$ , on note  $C^- \subset X^*$  son cône normal associé défini par  $C^- = \{c \in X^* | \forall x \in C, \langle c, x \rangle \leq 0\}$ . Le théorème de Moreau permet une extension aux cônes convexes fermés de la décomposition pythagoricienne classique sur des espaces orthogonaux. Notamment,  $\forall x \in X, x = \Pi_C(x) + \Pi_{C^-}(x)$  avec  $\langle \Pi_C(x), \Pi_{C^-}(x) \rangle = 0$ .

Dans notre cas où  $N_K(x_t) = T_K(x_t)^-$ , on a ainsi  $f(x_t) = \Pi_{T_K(x_t)}(f(x_t)) + \Pi_{N_K(x_t)}(f(x_t))$ , soit  $\Pi_{T_K(x_t)}(f(x_t)) = f(x_t) - \Pi_{N_K(x_t)}(f(x_t))$ . On remplace donc  $f(x_t)$  par  $\Pi_{T_K(x_t)}(f(x_t))$  en lui soustrayant  $\Pi_{N_K(x_t)}(f(x_t))$ .

**Espace des contraintes** Les contraintes décrivant le domaine de viabilité  $K$  peuvent généralement s'exprimer à l'aide d'une fonction  $h$  de  $X$  vers un espace  $Y$  et d'un ensemble auxiliaire  $M \subset Y$ , en posant  $K = \{x \in X | h(x) \in M\}$ ; de sorte que  $x$  reste viable *ssi*  $h(x)$  reste dans  $M$ . De fait,  $K = h^{-1}(M)$ .

$h$  est par ailleurs supposée continûment différentiable, avec  $h'(x)$  surjective. En outre,  $M$  est supposé fermé convexe.

**Cas général** Remarquons d'abord que  $T_K(x) = h'(x)^{-1}T_M(h(x))$  : la condition  $x' \in T_K(x)$  devient  $h'(x)x' \in T_M(h(x))$ , ce qui nous permet de "travailler" dans  $M$ . D'autre part,  $N_K(x) = h'(x)^*N_M(h(x))$  : cette formule permet de trouver aisément les éléments de  $N_K(x)$  à partir de ceux de  $N_M(h(x))$ , eux-mêmes plus faciles à calculer.

Préliminairement, on peut montrer que si  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  est surjectif, si  $C$  fermé  $\subset Y$ , alors la solution  $v^o$  à  $\inf_{Av \in C} \|v - u\|$  est  $v^o = u - A^* \pi_{C^-}^{A^*} (AA^*)^{-1} Au$  où  $\pi_{C^-}^{A^*}$  est le projecteur de meilleure approximation sur  $C^-$  pour la norme  $\nu^A(y) = \|A^*y\|$ .

Appliquons ce résultat à notre problème : en remplaçant  $A$  par  $h'(x_t)$ ,  $C$  par  $T_M(h(x_t))$ ,  $v$  par  $x'_t$  et  $u$  par  $f(x_t)$ , on cherche à minimiser  $\|p_t\|$  pour les  $x'_t$  qui appartiennent à  $T_K(x_t)$ , soit les  $x'_t$  tels que  $h'(x_t)x'_t \in T_M(h(x_t))$ . Ceci revient à chercher la solution  $p_t^o$

de  $\inf_{h'(x_t)x'_t \in T_M(h(x_t))} \|p_t\|$  donc chercher la solution  $x'_t{}^o$  de  $\inf_{h'(x_t)x'_t \in T_M(h(x_t))} \|x'_t - f(x_t)\|$  puisque  $p_t = f(x_t) - x'_t$ .

D'après ce qui précède, on obtient  $x'_t{}^o = f(x_t) - h'(x_t)^* q_t{}^o$  en posant  $q_t{}^o = \pi_{N_M(h(x_t))}^{h'(x_t)^*} (h'(x_t)h'(x_t)^*)^{-1} h'(x_t) f(x_t)$ . Finalement, la correction à apporter à la dynamique est :

$$\boxed{\Pi_{N_K(x_t)} f(x_t) = p_t{}^o = h'(x_t)^* q_t{}^o} \quad (1.1)$$

**Exemple pratique 1** Considérons  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $y \in \mathbf{R}^n$ , et  $w \in \mathbf{R}$  variables d'état dont on suppose qu'elles sont soumises aux dynamiques autonomes (ou initiales) suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha(x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \beta(y(t)) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \gamma(w(t)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

On pose  $X = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$  et  $K = \{(x, y, w) \in X \mid x - wy \leq 0\}$ . En définissant  $h(x, y, w) = x - wy$  et  $M = \mathbf{R}^{-n} \subset Z$  on obtient  $K = h^{-1}(M)$ . Le système  $(x, y, w)$  est donc viable ssi  $h(x, y, w) \in M$ .

Constatons que la dérivée de  $h$  en  $(x, y, w)$  est une fonction de  $h'(x, y, w) : X \rightarrow Z$ , sa transposée  $h'(x, y, w)^*$  est donc une fonction  $X^* \leftarrow Z^* \ni q$ . On a  $h'(x, y, w)(dx, dy, dw) = dx - wdy - ydw$ , soit :

$$\begin{aligned} \langle h'(x, y, w)^* q, (dx, dy, dw) \rangle &= \langle q, h'(x, y, w)(dx, dy, dw) \rangle \\ &= \langle q, dx \rangle - \langle q, wdy \rangle - dw \langle q, y \rangle \\ &= (q)dx - (wq)dy - (\langle q, y \rangle)dw \end{aligned}$$

d'où  $p = h'(x, y, w)^* q = \begin{pmatrix} q \\ -wq \\ -\langle q, y \rangle \end{pmatrix}$  et finalement, la dynamique doit donc être corrigée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha(x(t)) - q(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \beta(y(t)) + w(t)q(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \gamma(w(t)) + \langle q(t), y(t) \rangle \end{aligned} \quad (1.2')$$

**Exemple pratique 2** Si la fonction  $h$  est de la forme  $h(x, W) = Wx$ , où  $W$  est un opérateur linéaire de  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ , profitant de ce que  $h'(x, W)(dx, dW) = Wdx + dWx$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle h'(x, W)^* q, (dx, dW) \rangle &= \langle q, Wdx + dWx \rangle \\ &= \langle q, Wdx \rangle + \langle q, dW, x \rangle \\ &= \langle W^* q, dx \rangle + \langle x \otimes q, dW \rangle \end{aligned}$$

soit  $p = \begin{pmatrix} W^*q \\ x \otimes q \end{pmatrix}$ , et la correction à effectuer est :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha(x(t)) - W^*q(t) \\ \frac{dW(t)}{dt} &= \gamma(W(t)) - x(t) \otimes q(t) \end{aligned}$$

Cette notion se généralise sans problème aux opérateurs  $n$ -linéaires, en donnant une correction de type produit tensoriel pour  $W$  :

$$\frac{dW(t)}{dt} = \gamma(W(t)) - \left( \bigotimes_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i(t) \right) \otimes q(t)$$

C'est l'expression que l'on retrouve dans les modèles présentés dans ce mémoire.



# Annexe B

## Algorithme d'apprentissage lourd

Soient  $X$ ,  $Y$  et  $\mathcal{W}$  des espaces vectoriels de dimension finie, et un réseau adaptatif régi par la dynamique suivante, affine en fonction de  $W$  :

$$F(x, W) = c(x) + G(x)W$$

On suppose en outre que  $c : X \rightarrow Y$  et  $G : X \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{W}, Y)$  continues, et  $G(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{W}, Y)$  surjective pour tout  $x$ .

Soit le problème d'apprentissage suivant :

*Pour  $n$  couples (entrée, sortie)  $\{(a_i, b_i) \in X \times Y\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ , trouver  $W_n$  tel que la contrainte  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_i = F(a_i, W_n)$  soit satisfaite.*

On appellera  $\mathcal{W}_n$  l'ensemble des paramètres qui vérifient cette contrainte pour  $n$  exemples, et on supposera que les  $G(a_n)$  sont tous orthogonaux deux à deux. En admettant que  $W_{n-1}$  soit déjà trouvé (i.e.  $W_{n-1} \in \mathcal{W}_{n-1}$ ), il s'agit de trouver un nouveau contrôle  $W_n$  découlant de l'apprentissage du  $n$ -ième exemple et qui soit le plus proche de  $W_{n-1}$  :

$$W_n = \min_{W \in \mathcal{W}_n} \|W - W_{n-1}\|.$$

Ceci correspond, dans le cas discret, à l'évolution lourde pour le système  $\{F(x, W)\}$  décrite en 1.4.2. L'algorithme qui nous donne la solution optimale est donc [3, Aubin] :

$$W_n = W_{n-1} - G(a_n)^+(c(a_n) + G(a_n)W_{n-1} - b_n)$$

où  $G(a_n)^+$  est l'inverse orthogonal à droite de  $G(a_n)$ , qui vaut  $G(a_n)^+ = G(a_n)^*(G(a_n)G(a_n)^*)^{-1}$ .





# Bibliographie

- [1] Andersen R., Snyder L., Bradley D. & Xing J. (1997), *Multimodal Representation of Space in the Posterior Parietal Cortex and its Use in Planning Movements*, Annual Review of Neuroscience, 20 :303-330.
- [2] Aubin J.-P. (1991), *Viability Theory*, Birkhäuser.
- [3] Aubin J.-P. (1996), *Neural Networks and Qualitative Physics : A Viability Approach*, Cambridge University Press.
- [4] Aubin J.-P. (1997), *Dynamic Economic Theory : A Viability Approach*, Springer-Verlag.
- [5] Aubin J.-P. (2000), *Connectionist Complexity and its Evolution*, in Equations aux dérivées partielles, articles dédiés à J.-L. Lions, 50-79, Elsevier
- [6] Aubin J.-P. (2001), *Regulation of the Evolution of the Architecture of a Network by Connectionist Tensors Operating on Coalitions of Actors*, à paraître.
- [7] Aubin J.-P. (2001), *Evolution of Complex Economic Systems and Uncertain Informations*, à paraître
- [8] Aubin J.-P. (2002), *Viability Kernels and Capture Basins*, à paraître.
- [9] Aubin J.-P., Bourguine P. & Guzzi R. (2002), *Viabilité d'une dynamique économique : le cas des opérateurs de production multi-affines*, à paraître.
- [10] Aubin J.-P. & Burnod Y. (1998), *Hebbian Learning in Neural Networks with Gates*, Cahiers du centre de recherche Viabilité, Jeux, Contrôle n° 981.
- [11] Aubin J.-P. & Frankowska H. (1990), *Set-valued Analysis*, Birkhäuser.
- [12] Bourguine P. (2001), *Global Social Cognition*, in Rapports du CREA (Ecole Polytechnique), 2001-15.
- [13] Buser P. & Imbert M. (1987), *Vision in Neurophysiologie fonctionnelle*, Hermann, Paris.
- [14] Cowan R., Jonard N. & Zimmermann J.-B. (2002), *The Joint Dynamics of Networks and Knowledge*, à paraître.
- [15] Dayhoff J. (1990), *Neural network architectures : an introduction*, chapitre 8, *Biological Synapses*, John Wiley and Sons.
- [16] Hebb D. O. (1949), *The Organization of Behavior : A Neuropsychological Theory*, Wiley.

- [17] Kohonen T. (1995), *Self-organizing Maps*, Springer-Verlag.
- [18] McClelland J., Rumelhart D. & Hinton G. (1986), *Parallel Distributed Processing*, M.I.T. Press.
- [19] Samuelson P. (1954), *The Pure Theory of Public Expenditure*, in *Review of Economics and Statistics*, 36 :387-389.